ΣΥΓΓΡΑΜΜΑΤΑ

Δ. Κουτρουφιώτη, Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία
Β. O'Neil , " " "
Α. Pressley , " " "

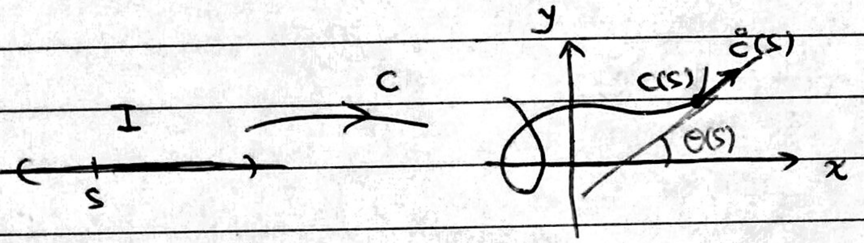
M. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces.

Διαφορική Γεωμετρία

Τοπ. διαφ. Γεωμ. Ολική διαφ. Γεωμ.

ΟΛΙΚΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ ΤΟΥ $\mathbb{R}^2$

Έστω $c: I \to \mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I$



$c(s) = (x(s), y(s))$
$\mathring{c}(s) = (\mathring{x}(s), \mathring{y}(s)) = \vec{t}(s)$
$\|\mathring{c}(s)\| = 1 \Leftrightarrow \mathring{x}^2(s) + \mathring{y}^2(s) = 1$

Έτσι, $\mathring{c}: I \subset \mathbb{R} \to S^1$
Για τον ορισμό της καμπυλότητας βοηθά το λήμμα

ΛΗΜΜΑ
Έστωσαν $a, b: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $a^2(t) + b^2(t) = 1, \forall t \in I$
Αν a, b είναι C^1 συναρτήσεις τότε $\forall \varphi_0 \in \mathbb{R}$, υπάρχει μοναδική γωνιακή συνάρτηση (συνεχ.) $\varphi: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{cases} a(t) = \cos\varphi(t), & b(t) = \sin\varphi(t) \\ \varphi(t_0) = \varphi_0, & t_0 \in I \end{cases}$$

Απόδειξη
Ορίζουμε τη συνάρτηση $\varphi: I \to \mathbb{R}$ ώστε
$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} (ab' - a'b)$ διαφορίσιμη (Θ.Θ.Ο.Λ.)
Σε πρώτη φάση:
$F(t) = (a(t) - \cos\varphi(t))^2 + (b(t) - \sin\varphi(t))^2 =$
$= 2 - 2a(t)\cos\varphi(t) - 2b(t)\sin\varphi(t)$

Παραγωγίζοντας

$f'(t)=0$

Έτσι, από το λήμμα έχουμε ότι $\exists\, \theta(s)$, $s\in I$ ώστε $\dot{x}(s)=\cos\theta(s)$ και $\dot{y}(s)=\sin\theta(s)$

Σε δεύτερη φάση:

Έστω $\tilde{\varphi}(t)$ ώστε $a(t)=\cos\tilde{\varphi}(t)$ & $b(t)=\sin\tilde{\varphi}(t)$ και $\tilde{\varphi}(t_0)=\varphi_0$. Έχουμε, $\cos\tilde{\varphi}(t)=\cos\varphi(t)$ & $\sin\tilde{\varphi}(t)=\sin\varphi(t)$

Τότε $\forall t$, $\exists k(t)\in\mathbb{Z}$ ώστε $\tilde{\varphi}(t)=\varphi(t)+2\cancel{k(t)}\pi \to k(t)=\frac{1}{2\pi}(\tilde{\varphi}(t)-\varphi(t))$

για $t=t_0 \to \tilde{\varphi}(t_0)=\varphi(t_0)+2k(t_0)\pi$

Από το ΘΕΤ πηγάζει ότι $k=$ σταθ.

Αν $\tilde{\theta}(s)$ είναι μια άλλη συνάρτηση με $\dot{x}(s)=\cos\tilde{\theta}(s)$ και $\dot{y}(s)=\sin\tilde{\theta}(s)$. Τότε, υπάρχει $k\in\mathbb{Z}$ ώστε $\tilde{\theta}(s)=\theta(s)+2k\pi$

Αν η c είναι C^2 τότε $k=\dot{\theta}$.

ΛΗΜΜΑ

Έστω $c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ καμπύλη C^1 με παράμετρο το μήκος τόξου $s\in I$ και $c(s)=(x(s),y(s))$

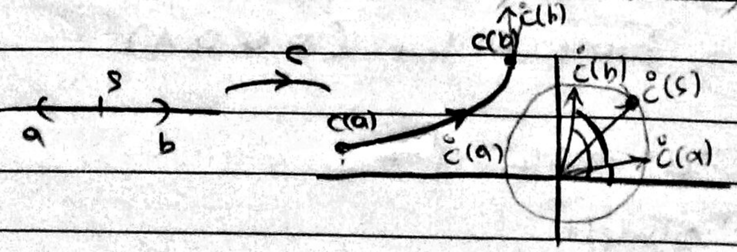
i) Υπάρχει C^1 συνάρτηση $\theta:[a,b]\to\mathbb{R}$ ώστε το $\dot{x}(s)=\cos\theta(s)$ και $\dot{y}(s)=\sin\theta(s)$

ii) Αν $\tilde{\theta}:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι μία άλλη γωνιακή συνάρτηση που να πληρεί τις ιδιότητες αυτές τότε $\exists k\in\mathbb{Z}$: $\tilde{\theta}(s)=\theta(s)+2k\pi$, $\forall s\in[a,b]$

iii) Η ποσότητα $\theta(b)-\theta(a)$ είναι ανεξάρτητη της γωνιακής συνάρτησης

Απόδειξη

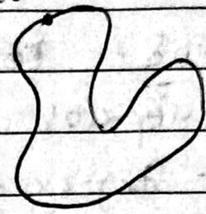
iii) $\tilde{\theta}(b)-\tilde{\theta}(a)=\theta(b)+\cancel{2k\pi}-\theta(a)-\cancel{2k\pi}=\theta(b)-\theta(a)$



Κλειστες Καμπύλες

ΟΡΙΣΜΟΣ Μια καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ με παράμετρο το μήκος τόξου καλείται κλειστή αν υπάρχει $\ell>0$ τέτοιος ώστε $c(s+\ell)=c(s)$ (περιοδική με θετική περίοδο)

$c(s)=c(s+\ell)$

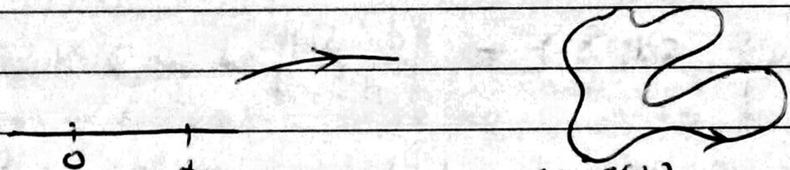


Με τον κανόνα της αλυσίδας έπεται

$$\dot{c}(s+\ell)=\dot{c}(s)$$

Το προηγούμενο λήμμα ισχύει για τα i και ii

Έστω $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ κλειστή με περίοδο $\ell>0$
Τότε από το λήμμα υπάρχει συνεχής συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $\dot{x}(s)=\cos\varphi(s)$ & $\dot{y}(s)=\sin\varphi(s)$



$c(0)=c(\ell)$

$c|_{[0,\ell]}$: $\varphi(\ell)-\varphi(0)$: δηλώνει τη συνολική μεταβολή της γωνίας που σχηματίζει η $\dot{c}(s)$ με τον $x'x$

Το $\ell>0$ είναι το μήκος της καμπύλης
αφού : $L_0^{\ell}(c)=\int_0^{\ell}\|\dot{c}(s)\|\,ds=\int_0^{\ell}ds=\ell$

Αντί να μιλάμε για περίοδο ℓ, θα μιλάμε για καμπύλη μήκους ℓ.

$\dot{c}(s)=(\cos\varphi(s),\sin\varphi(s))\ ,\ \forall s$
$\dot{c}(s+\ell)=(\cos\varphi(s+\ell),\ \sin\varphi(s+\ell))$

όμως, $\dot{c}(s+\ell)=\dot{c}(s)$ και τότε

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\varphi(s+\ell)=\cos\varphi(s)\\ \sin\varphi(s+\ell)=\sin\varphi(s)\end{array}\right. \Rightarrow \exists\, k(s)\in\mathbb{Z}:\ \varphi(s+\ell)-\varphi(s)=2k(s)\pi$$

Έτσι, $k(s)=$ σταθ.

Παρατήρηση

Αν $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ είναι κλειστή καμπύλη μήκους $\ell>0$, τότε η γωνιακή συνάρτηση φ πληροί τη σχέση:

$\varphi(s+\ell)-\varphi(s)=2k\pi$, $\forall s$ όπου k: σταθερός ακέραιος.

Συνολική μεταβολή γωνίας $=\varphi(\ell)-\varphi(0)=2k\pi$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ κλειστή καμπύλη μήκους $\ell>0$.
Ο ακέραιος $k=\dfrac{\varphi(\ell)-\varphi(0)}{2\pi}$ είναι καλά ορισμένος (ανεξ. της φ) και λέγεται δείκτης ή αριθμός περιστροφής της καμπύλης.

Συμβολισμός: $n_c=\dfrac{\varphi(\ell)-\varphi(0)}{2\pi}$

Π.χ 1

Έστω $r>0$ και ας είναι η καμπύλη $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$

$c(s)=\left(r\cos\frac{s}{r},\ r\sin\frac{s}{r}\right)$, $s\in\mathbb{R}$

Λόγω $\dfrac{dc(s)}{ds}=\left(-\sin\frac{s}{r},\ \cos\frac{s}{r}\right)\Rightarrow\left\|\dfrac{dc(s)}{ds}\right\|=1\Rightarrow s$: Μήκος τόξου.

Ισχυρίζομαι ότι η c κλειστή μήκους $\ell=2\pi r$.

Πράγματι $c(s+2\pi r)=c(s)$

$\dot c(s)=\left(-\sin\frac{s}{r},\ \cos\frac{s}{r}\right)=\left(\cos\left(\frac{s}{r}+\frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\frac{s}{r}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$

αλλά

$\dot c(s)=(\cos\varphi(s),\ \sin\varphi(s))$

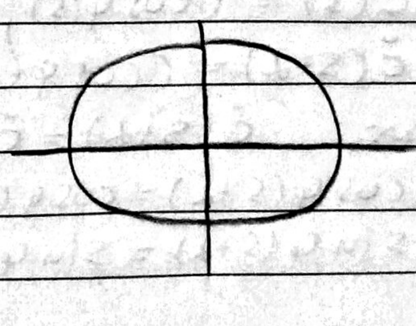
Άρα, $\varphi(s)=\frac{s}{r}+\pi/2$

Συνεπώς, $\varphi(\ell)-\varphi(0)=\varphi(2\pi r)-\varphi(0)=\frac{2\pi r}{r}+\pi/2-0-\pi/2=2\pi$

Άρα, $n_c=+1$

Πχ 2

Έστω $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ έλλειψη



$c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $c(t) = (\alpha \cos t, \beta \sin t)$, t όχι το μήκος τόξου αφού $c'(t) = (-a\sin t, b\cos t)$, $\|c'(t)\| \neq 1$

$c(t+2\pi) = c(t)$

Πρακτικά δεν μπορώ να βρω το δείκτη διότι η έλλειψη δεν είναι απλή καμπύλη.

Παρατηρήσεις:

- $n_c = \dfrac{\varphi(s+\lambda) - \varphi(s)}{2\pi} \overset{s=-\lambda}{=} \dfrac{\varphi(0) - \varphi(-\lambda)}{2\pi}$

- $\mathring{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$

  Η καμπυλότητα της c είναι συνάρτηση $k: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $k(s) = \mathring{\varphi}(s)$. Έτσι, αν ολοκληρώσουμε:

  $\int_0^{\lambda} \mathring{\varphi}(s)ds = \varphi(\lambda) - \varphi(0) = 2\pi \cdot n_c$

Άρα, αποδείξαμε ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Αν $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κλειστή μήκους λ, τότε:

$\int_0^{\lambda} k(s)ds = 2\pi n_c$

Απλές κλειστές καμπύλες

Ορισμός: Μια κλειστή καμπύλη $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ μήκους $\lambda > 0$ καλείται απλή αν ο περιορισμός $c|_{[0,\lambda)}$ είναι 1-1

Πχ1

$c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ με $c(s) = (\cos s, \sin s)$, $\lambda = 2\pi$

$c|_{[0,2\pi)}$ 1-1 δηλ. c είναι απλή

$n_c = +1$

Πχ2

$\tilde{c}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\tilde{c}(s) = (\cos 2s, \sin 2s)$, $\lambda = 2\pi$

όχι 1-1, με $n_{\tilde{c}} = +2$ (όχι απλή)

ΘΕΩΡΗΜΑ (Umlaufsatz)
Αν η c είναι απλή και κλειστή καμπύλη τότε έχει αριθμό περιστροφής $n_c = \pm 1$

Πρόταση
Έστω $c, \tilde{c} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ κλειστές καμπύλες με κοινό μήκος $l > 0$. και κοινό μήκος τόξου
Αν η μια είναι αναπαραμέτρηση της άλλης τότε για τους αριθμούς περιστροφής ισχύει: $n_{\tilde{c}} = \pm n_c$
με $-$ μόνο όταν η φορά στροφής αλλάζει
Απόδειξη
Έστω $\tilde{c}(s)$ αναπαραμέτρηση της $c(s)$. Δηλ. $\tilde{c}(s) = c(f(s))$

$$\dot{\tilde{c}}(s) = \frac{df}{ds}(s)\,\dot{c}(f(s)) \Rightarrow \|\dot{\tilde{c}}(s)\| = \left|\frac{df}{ds}(s)\right| \cdot \|\dot{c}(f(s))\| \Leftrightarrow$$

$$1 = \left|\frac{df}{ds}(s)\right| \Leftrightarrow \frac{df}{ds}(s) = \pm 1, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Άρα, $f(s) = s + s_0$ ή $f(s) = -s + s_0$

Έστω λοιπόν, $\varphi(s)$, $\tilde{\varphi}(s)$ γωνιακές συναρτήσεις της c και $\tilde{c}$ αντίστοιχα
$\dot{c}(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$
$\dot{\tilde{c}}(s) = (\cos\tilde{\varphi}(s), \sin\tilde{\varphi}(s))$
Περίπτωση 1: $\frac{df}{ds}(s) = 1 \Rightarrow f(s) = s + s_0 \Rightarrow \dot{\tilde{c}}(s) = \dot{c}(s+s_0)$

$$\Leftrightarrow (\cos\tilde{\varphi}(s), \sin\tilde{\varphi}(s)) = (\cos\varphi(s+s_0), \sin\varphi(s+s_0))$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\varphi}(s) = \varphi(s+s_0) + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$$

ή μπορώ να πάρω $n_{\tilde{c}} = \dfrac{\tilde{\varphi}(l) - \tilde{\varphi}(0)}{2\pi} = \dfrac{\varphi(l+s_0) - \varphi(s_0)}{2\pi} = n_c$

Περίπτωση 2: $f(s) = -s + s_0 \Rightarrow \dot{\tilde{c}}(s) = -\dot{c}(-s+s_0)$
$\Leftrightarrow (\cos\tilde{\varphi}(s), \sin\tilde{\varphi}(s)) = -(\cos\varphi(-s+s_0), \sin\varphi(-s+s_0)) =$
$= (\cos(\varphi(-s+s_0)+\pi), \sin(\varphi(-s+s_0)+\pi)) \Leftrightarrow$
$\tilde{\varphi}(s) = \varphi(-s+s_0) + \pi + 2l\pi, \quad l \in \mathbb{Z}$

$$n_{\tilde{c}} = \frac{\tilde{\varphi}(\lambda) - \tilde{\varphi}(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left\{\varphi(-\lambda+s_0) + (2\ell+1)\pi - \varphi(s_0) - (2\ell+1)\pi\right\} =$$

$$= \frac{\varphi(-\lambda+s_0) - \varphi(s_0)}{2\pi} = -\frac{\varphi(s_0) - \varphi(-\lambda+s_0)}{2\pi} = -n_c$$

<u>1ος στόχος</u> : Θα παραληφθεί το C^1 στο αρχικό λήμμα και θα ισχύει το συμπέρασμα

<u>ΛΗΜΜΑ</u>

Έστωσαν $a, b : I \to \mathbb{R}$ $\left(\overset{=[c,d]}{I}\right)$ συνεχείς : $a^2(t) + b^2(t) = 1$, $\forall t \in I$

i) Τότε $\exists$ συνεχής συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ώστε $a(t) = \cos\varphi(t)$, $b(t) = \sin\varphi(t)$

ii) Αν $\varphi, \tilde{\varphi}$ είναι δύο συνεχείς γωνιακές συναρτήσεις τότε $\exists \ell \in \mathbb{Z}$: $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t) + 2\ell\pi$

iii) Για δοθέν $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ $\exists!$ φ γωνιακή συνάρτηση που να πληροί την i τ/ω $\varphi(t_0) = \varphi_0$.

<u>Εφαρμογή του λήμματος:</u>

$f : I \to S^1$, $f(t) = (a(t), b(t))$ συνεχ. $\Rightarrow \exists$ $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ώστε $f(t) = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$

<u>Απόδειξη</u>

Έστω ότι $\exists$ $a(t) = \cos\varphi(t)$, $b(t) = \sin\varphi(t) \Rightarrow$

$\Rightarrow \tan\varphi(t) = \frac{b(t)}{a(t)} \Rightarrow \varphi(t) = \tan^{-1}\frac{b(t)}{a(t)}$ αν $a(t) > 0$ ή < 0

και $\varphi(t) = c\tan^{-1}\frac{a(t)}{b(t)}$ αν $b(t) > 0$ ή < 0.

Έτσι, $S^1 = S^1_\delta \cup S^1_a \cup S^1_\pi \cup S^1_\kappa$

$S^1_\delta = \{(x,y) \in S \mid x > 0\}$, $S^1_\alpha = \{(x,y) \in S \mid x < 0\}$

$S^1_\pi = \{(x,y) \in S \mid y > 0\}$, $S^1_\kappa = \{(x,y) \in S \mid y < 0\}$

Αν $f(I) \subset S^1_\delta \Rightarrow$ ορίζω $\varphi(t) = \tan^{-1}\frac{b(t)}{a(t)}$

$f:[c,d]\to S^1$ συνεχής $\longrightarrow$ f ομοιομ. συνεχ.

δηλ. $(\forall \varepsilon>0)(\exists \delta=\delta(\varepsilon))(\forall t_1,t_2)\ |t_1-t_2|<\delta \to d(f(t_1),f(t_2))<\varepsilon$

$|t_i-t_{i-1}|<\delta \to f([t_{i-1},t_i])\subset S^1_\delta$ ή S^1_α ή S^1_π ή $S^1_\kappa \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ορίζεται γωνιακή συνάρτηση $\varphi_i:[t_{i-1},t_i]\to\mathbb{R}$

$$\varphi(t)=\begin{cases}\varphi_1(t), & t\in[t_0,t_1]\\ \varphi_2(t)+a_1, & t\in[t_1,t_2]\\ \vdots & \end{cases}$$

$\varphi_1(t_1)=\varphi_2(t_1)+a_1$ (να υπάρχει συμφωνία στα όρια)